Mécanique:

Rappel mathématique.

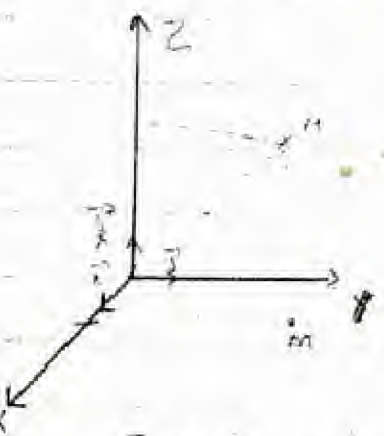
Repérages: Pour connaitre le mvt d'un point materiel il faut connaitre sa position dans l'espace.

=> faire un repérage dans l'espace et dans le temps

* Repérage dans le temps:
  + Il faut une horloge pour mesurer le temps. L'unité de mesure dans le SI est: s
* Repérage dans l'espace:
  + Il faut fixer un differentiel et un système de coordonnées
  + un corps est en mvt par rapport à un objet solide est un refferentiel
  + Il faut rattacher a ce refferentiel qui s'adapte au type du mvt
  - tt objet qui nous entoure est à 3 dims, ainsi que l'espace qui nous entoure pour se repérer dans l'espace on fixe des directions et un point d'origine.

Exemple:

- Le repère cartésien : $R(O;x;y;z)$
- $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$: base cartésienne : base orthonormé directe.



$\overrightarrow{OM}$: vect position.

O = point d'app.

M : l'extrimité de $\overrightarrow{OM}$

sens : O vers M

direction : celle de la droite qui passe par O et M.

module : distance OM.

Type de vecteurs

- vecteur lié : c'est un vect dont on précise l'origine (Vect vitesse V)



- Vecteur glissant : c'est un vect dont on précise le support (vect force). La position exacte du vect dans le support n'a pas d'influence sur son effet.

Ex : - Tension du fil $\vec{T}$

- Poids d'une particule $\vec{P}$.

[illegible]

Soit $\vec{u}$ un vect qui dépend du temps "t"

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{u}(t+\Delta t) - \vec{u}(t)}{\Delta t}$$

Si on a : $\vec{u} = \vec{OM}$: vect position.

Quand t varie l'extrémité M de $\vec{u}$ décrit une courbe (C)

$\vec{u}(t) = \vec{OM}$

$\vec{u}(t+\Delta t) = \vec{OM'}$

$\vec{u}(t+\Delta t) - \vec{u}(t) = \vec{MM'}$

$\frac{d\vec{u}}{dt}$ est un vect tangent à (C) au point M.

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{MM'}}{\Delta t}$$

- ppté

$$\frac{d(\lambda \vec{u})}{dt} = \lambda \frac{d\vec{u}}{dt}$$

$$\frac{d(\vec{u}\cdot\vec{v})}{dt} = \vec{u}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{u}}{dt}\cdot\vec{v}$$

$$\frac{d(\vec{u}\wedge\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{u}}{dt}\wedge\vec{v} + \vec{u}\wedge\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = (\vec{w};\vec{u};\vec{v}) = (\vec{v};\vec{w};\vec{u})$$

$$\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w}) = (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}$$

[illegible]

+ Soit un vecteur $\vec{v}$ d'origine A. $\vec{v} = \vec{AP}$

Soit un point O de l'espace le moment de $\vec{v}$ par rapport à O est

$\mathcal{M}_O(\vec{v}) = \vec{OA} \wedge \vec{v}$

=> Module

$\| \mathcal{M}_O(\vec{v}) \| = \| \vec{OA} \| . \| \vec{v} \| \sin \alpha$

-> Si on considère un autre point de l'espace O'

$\mathcal{M}_{O'}(\vec{v}) = \vec{O'A} \wedge \vec{v}$

$= (\vec{O'O} + \vec{OA}) \wedge \vec{v}$

$= (\vec{O'O} \wedge \vec{v}) + (\vec{OA} \wedge \vec{v})$

$\mathcal{M}_{O'}(\vec{v}) = \vec{O'O} \wedge \vec{v} + \mathcal{M}_O(\vec{v})$

$\mathcal{M}_{O'}(\vec{v}) = \mathcal{M}_O(\vec{v}) + \vec{O'O} \wedge \vec{v}$

$\mathcal{M}_O(\vec{v}) = \mathcal{M}_{O'}(\vec{v}) + \vec{OO'} \wedge \vec{v}$

* Moment d'un vect à un axe

Soit un axe (Δ) auquel on associe un vect uni $\vec{u}$ et on considère un point $O \in (\Delta)$

=> $\mathcal{M}_\Delta(\vec{v}) = \vec{u} . \mathcal{M}_O(\vec{v})$

$= \vec{u} . (\vec{OA} . \vec{v})$

si on considère un autre pt O' de (Δ)

$\mathcal{M}_\Delta(\vec{v}) = \vec{u} . \mathcal{M}_{O'}(\vec{v})$

$= \vec{u} . (\vec{O'A} \wedge \vec{v})$

$= \vec{u} . ((\vec{O'O} + \vec{OA}) \wedge \vec{v})$

$= \vec{u} . ((\vec{O'O} \wedge \vec{v}) + (\vec{OA} \wedge \vec{v}))$

or : O' et $O \in (\Delta)$ => $\vec{u}$ et $\vec{OO'}$ sont colinéaire

=> P. mixte $\vec{u} . (\vec{OO'} \wedge \vec{v}) = 0$

donc $\mathcal{M}_\Delta(\vec{v}) = \vec{u} (\vec{OA} \wedge \vec{v})$

c/c : Le moment de $\vec{v}$ % à (Δ) ne change pas si on change le pt de (Δ)

D.P : Exemple : $f(x;y;z) = x^2 + y^2 + z^2 + xye^z$

Calculer les DP suivantes :

$f_x ; f_y ; f_z ; f_{xx} ; f_{yy} ; f_{zz} ; f_{xy} ; f_{yz} ; f_{xz}$



$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + ye^z$$
$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + xe^z$$
$$f_z = \frac{\partial f}{\partial z} = 2z + xye^z$$

* D.P secondes

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = 2 \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.$$
$$f_{zz} = 2 + xye^z$$

* D.P secondes croisées

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = e^z \quad ; \quad f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = e^z$$
$$f_{yz} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = xe^z \quad ; \quad f_{zy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = xe^z$$
$$f_{xz} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = ye^z \quad ; \quad f_{zx} = ye^z$$

C/C : f est continue donc

$$f_{xy} = f_{yx} \; ; \; f_{yz} = f_{zy} \; ; \; f_{xz} = f_{zx}$$

[illegible]

+ La somme des dérivées partielles multipliés par l'accroissem dû à chacune des variables

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z$$

Pour les accroissements infinitésimaux on écrit :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Or $df = \overrightarrow{grad} f \cdot \overrightarrow{dr}$

où $\overrightarrow{grad} f$ vect des dérivées partielles

$$\overrightarrow{grad} f \begin{cases} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \\ \partial f/\partial z \end{cases} \qquad \overrightarrow{dr} \begin{cases} dx \\ dy \\ dz \end{cases}$$

Pour l'exemple on trouve

$$df = (2x + ye^z)dx + (2y + xe^z)dy + (2z + xye^z)dz.$$

[illegible]

1- Equ diff du 1er ordre :

$$R\left(t ; x(t) ; \frac{dx(t)}{dt}\right) = 0 \; (1)$$

$x(t)$ = fct inconnue à déterminer

Résoudre cette équ c'est déterminer la fct $x(t)$ on montre que



La solution met en jeu un cte qui doit être determiné pour cela on impose une condition initiale sur la fct $x(t)$. Par exemple on nous donne à $t = t_0$: $x = x_0$

i - Equ diff à variables separés

(1) $\frac{dx}{dt} = \frac{g(t)}{f(x)}$

$\Leftrightarrow \int f(x)\,dx = \int g(t)\,dt$

$F(x) = G(x) + K$

où F et G sont les primitives de f et g.

Exple

$\frac{dx}{dt} = \frac{x+1}{t+1} = 0$ $\quad \frac{x \geq 0}{t \geq 0}$

Cond: à $t = 0$; $x = 0$

$\frac{dx}{dt} = \frac{x+1}{t+1} \Leftrightarrow \frac{dx}{x+1} = \frac{dt}{t+1} \Leftrightarrow \int \frac{dx}{x+1} = \int \frac{dt}{t+1}$

$\Leftrightarrow \ln(x+1) = \ln(t+1) + K$.

$K = ?$ à $t = 0$; $x = 0$ $\Rightarrow K = 0$

$\ln(x+1) = \ln(t+1)$

$x+1 = t+1 \Leftrightarrow x = t \Rightarrow x(t) = t$.

ii Equ homogènes:

(1) s'écrit sous la forme : $\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{x}{t}\right)$.

Exemple

$t x . \frac{dx}{dt} - (t^2 + x^2) = 0$

$\frac{dx}{dt} = \frac{t^2 + x^2}{tx}$

$\frac{dx}{dt} = t\left(\frac{1 + \left(\frac{x}{t}\right)^2}{x}\right) = f\left(\frac{x}{t}\right)$

on pose $u = \frac{x}{t} \Rightarrow x = u . t$

$\frac{dx}{dt} = t . \frac{du}{dt} + u = u + t\frac{du}{dt}$



(2) $\Leftrightarrow x + t\frac{dx}{dt} = \frac{1+x^2}{x}$

$$x^2 + xt\frac{dx}{dt} = 1 + x^2$$

$$x\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$$

$$\int x\,dx = \int \frac{dt}{t}$$

$$\frac{x^2}{2} = \log t + c = \log(kt) \qquad (k>0)$$

$$\frac{x^2}{2t^2} = \log(t) + c$$

$$x(t) = t\sqrt{2}\,.\sqrt{\log(t) + k}$$

$$x(t) = t\sqrt{2(\log t + k)}$$

iii/ Equ linéaires :

s'écrit sous la forme :

$$\frac{dx}{dt} + x f(t) = g(t).$$

La résolution se procède comme pour l'exemple suivant

$$\frac{dx}{dt} - \frac{x}{t} = t^2 \quad (\text{à } t = 1 ;\ x = 1)$$

* La résolution se fait en 2 étapes :

1ère étape : on résoud l'équ sans second membre

$$\frac{dx}{dt} - \frac{x}{t} = 0$$

$$\Rightarrow x(t) = c\,t \quad \text{où } c \text{ est une cte}$$

2ème étape : on utilise la méthode appelé méthode de la variation de la cte et on transforme $x(t) = ct \Rightarrow$ on remplace $x(t)$ ds l'équ avec second membre (AVS)

$$\frac{d(c(t).t)}{dt} - \frac{c(t).t}{t} = t^2$$

$$\frac{t\,dc(t)}{dt} + c(t)\frac{dt}{dt} - c(t) = t^2.$$

$$\frac{t\,dc(t)}{dt} = t^2.$$

$$\frac{dc(t)}{dt} = t$$



$C(t) = \int t\,dt$

$C(t) = \frac{t^2}{2} + K.$

alors la sol est $x(t) = \left(\frac{t^2}{2} + k\right) t.$

à $t=1$; $x=1$: $1 = \frac{1}{2} + k. \Rightarrow k = \frac{1}{2}.$

La sol générale est : $x(t) = \frac{1}{2}(t^3 + t).$

2. Eq diff du 2ème ordre :

Elles sont de la forme : $R\left(t; x; \frac{dx}{dt}; \frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0$

on traite ici un cas particulier le plus souvent rencontré :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2a\frac{dx}{dt} + bx = f(t). \quad (a.b \text{ sont des cts})$$

La solution générale est la somme de la sol ~~générale~~ particulière et de la sol de l'équ SSm.

$$x_g(t) = x_{ssm}(t) + x_p(t).$$

1ère étape : comment retrouver les sol $x_{ssm}(t)$

Eq SSm : $\frac{d^2x}{dt^2} + 2a\frac{dx}{dt} + bx = 0$

La sol est de type e^{rt} où r est à déterminer en remplaçant dans (1)

$\frac{de^{rt}}{dt} = re^{rt}$ et $\frac{d^2e^{rt}}{dt^2} = r^2e^{rt}$

(1) $\Rightarrow r^2 + 2ar + b = 0$: C'est l'équ caractéristique du btème

r est déterminé selon le signe de $\Delta' = a^2 - b$ 3 cas distingué

1er cas $\Delta' > 0$ $a^2 > b$

deux racines réelles $r_{1,2} = -a \mp \sqrt{\Delta}$

$\Rightarrow$ 2 solutions e^{r_1t} et e^{r_2t}

ptés : si x_1 et x_2 sont 2 solutions de l'équ alors ∀ combinaison linéaire de la forme $(c_1x_1 + c_2x_2)$ est aussi une sol la sol de l'équ SS.m est dans ce cas est : $x_{ssm}(t) = Ae^{r_1t} + Be^{r_2t}$

2ème cas $\Delta' < 0$ $(a^2 < b)$

$\Rightarrow$ 2 racines complexes $r_{1,2} = -a \pm i\sqrt{b-a^2} = -a \mp i\omega$

$\Rightarrow$ la sol est alors :

$$x_{ssm}(t) = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t}$$
$$= C_1e^{(-a+i\omega)t} + C_2e^{(-a-i\omega)t}$$



$= e^{-at}\left(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{(-i\omega t)}\right)$

$= e^{-at}\left[\left(C_1(\cos\omega t + i\sin\omega t\right) + C_2(\cos\omega t - i\sin(\omega t))\right]$

$= e^{-at}\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right)$

$A = C_1 + C_2$

$B = (C_1 - C_2)i$

$\Delta' = 0$

La racine de l'équ caractéristique est unique $r = -a$

c'est la solution est écrite sous la forme $x(t) = C(t)e^{rt}$ où $C(t)$ est une fct à déterminer

→ remplaçons $C(t)$ dans l'éq S.S.m.

$* \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(C(t).e^{rt}) = \frac{dc}{dt}.e^{rt} + C(t).r.e^{rt}$

$* \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2C(t)}{dt^2}.e^{rt} + \frac{dC(t)}{dt}.re^{rt} + C.e^{rt} + C(t).r^2e^{rt}$

$= \frac{d^2C(t)}{dt^2}.e^{rt} + 2re^{rt}\frac{dC(t)}{dt} + r^2C(t).e^{rt}$

$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 2a\frac{dx}{dt} + bx = f(t)$.

$\frac{d^2C(t)}{dt^2}e^{rt} + (2r + 2a)e^{rt} + (r^2 + 2ar + b)C.e^{rt} = 0$.

$\frac{d^2C(t)}{dt^2} = 0$.

$\Rightarrow$ 1ère intégration $\Rightarrow \frac{dC(t)}{dt} = C_1$

$C(t) = C_1 t + C_2$

La sol est alors $x(t) = (C_1 t + C_2)e^{-at}$ si $(\Delta' = 0)$.

Recherche de la solution particulière :

La solution particulière est trouvée selon le type de la fct qui existe en second membre de l'éq générale : $f(t)$.

- si $f(t)$ = cte, la solution est prise une cte

- Si $f(t)$ est un polynome de degré n alors x_p est aussi un polynome de m̂ degré

- Si $f(t) = a\sin rt + b\cos rt \Rightarrow x_p$ sera : $a_0\sin\Omega t + b_0\cos\Omega t$



a_0, b_0 des ctes. pour les trois cas la substitution de la sol particulière x_p dans l'éq ~~générale~~ SSM permet de déterminer ses coefficients

Ex: Résoudre $\frac{dx^2}{dt^2} - x = t^2 - t$ avec les cond. initiale pour $t=0$; $x = 2$

$\left.\frac{dx}{dt}\right)_{t=2} = 1$

$\rightarrow$ Eq SSM: $\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0 \rightarrow$ éq caract : $r^2 - 1 = 0$

2 racines : $x(t) = Ae^{t} + Be^{-t}$

x_p? : le second membre est un poly de deg = 2

$\Rightarrow x_p(t) = at^2 + bt + c$

$\frac{dx_p}{dt} = 2at + b \Rightarrow \frac{d^2x_p(t)}{dt^2} = 2a$.

Ds l'éq (A S.M) $\Rightarrow 2a - at^2 - bt - c = t^2 - t$.

$\Rightarrow -at^2 - bt + (2a - c) = t^2 - t$.

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ 2a - c = 0 \Rightarrow c = 2a = -2 \end{cases}$$

$x_p(t) = -t^2 + t - 2$.

la solution générale est ; $x_g(t) = Ae^{t} + Be^{-t} - t^2 + t - 2$. à déterminer A et B.

$t = 0 \quad x_g(0) = A + B - 2 = 2$.

$\frac{dx}{dt} = Ae^{t} - Be^{-t} - 2t + 1$

$\left.\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = A - B + 1 = 1 \Rightarrow A = B \Rightarrow 2A - 2 = 2 \Rightarrow A = B = 2$.

$x_g(t) = 2(e^{t} + e^{-t}) - t^2 + t - 2$.

Rappel sur les fcts hyperboliques:

- $\mathrm{Ch}\,\omega t = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}$ $\qquad$ $\mathrm{Sh}\,\omega t = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}$

$\mathrm{Ch}'\omega t = \omega\,\mathrm{Sh}\,\omega t$ $\qquad$ $\mathrm{Sh}'\omega t = \omega\,\mathrm{Ch}\,\omega t$

$\mathrm{Ch}^2\omega t - \mathrm{Sh}^2\omega t = 1$

